# Agrégation interne de mathématiques
# Deuxième épreuve 2002

On désigne $\mathbb{R}$ par le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. Pour x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $F(x,y) = \int_x^y f(t)dt$.

On rappelle que, si la fonction f est réelle positive, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ si la fonction F est bornée. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est alors la borne supérieure de l'ensemble des nombres F(x,y), pour x et y parcourant $\mathbb{R}$. C'est aussi la limite de F(x, y) lorsque $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$.

Si la fonction f est à valeurs réelles ou complexes, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ si la fonction |f| est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est aussi la limite de F(x, y) lorsque $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$.

Si E est une partie de $\mathbb{R}^n$, on appelle fonction ***indicatrice*** ou fonction ***caractéristique*** de E, et on note $\mathbf{1}_E$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\mathbf{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$ $\mathbf{1}_E(x) = 0$ sinon.

L'objet de ce problème est la démonstration d'un résultat sur la mesure des polyèdres obtenus comme section d'un cube par un hyperplan (partie V). La démonstration nécessite des résultats préliminaires d'analyse qui sont établis dans les parties I et II, ainsi qu'une majoration de l'intégrale : $J_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt$ pour b >2. Cette majoration est partiellement établie dans les parties III et IV.

Les cinq parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

## I. Transformation de Fourier

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ixy}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) On définit une nouvelle fonction, notée $\hat{f}$, en posant pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

Démontrer que la fonction $\hat{f}$ est bornée continue.

2) a) Soient a et b deux nombres réels tels que a < b. Calculer $\hat{f}(y)$ lorsque f est la fonction $\mathbf{1}_{[a,b]}$ indicatrice de l'intervalle [a,b] de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que si A est un nombre réel >0, et $\chi_A$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle [–A,A] de $\mathbb{R}$, on a

$$\hat{\chi}_A(y) = \frac{2\sin(Ay)}{y} \text{ pour } y \in \mathbb{R},\ y \neq 0.$$

$$\hat{\chi}_A(0) = 2A$$

## II. Convolution

1) Soit A un nombre réel > 0, et soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulles hors de l'intervalle [-A,A] et continues sur cet intervalle. On définit une nouvelle fonction notée f*g, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

a) Vérifier que l'intégrale définissant f*g a un sens, et que la fonction f*g est nulle hors de l'intervalle [–2A, 2A].

b) Démontrer que la fonction f*g est continue.

2) Démontrer l'égalité $\chi_A * \chi_A = 2A\Delta_{2A}$. Où $\chi_A$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle [–A, A] de $\mathbb{R}$, et $\Delta_{2A}$ la fonction définie par

$$\Delta_{2A}(x) = 1 - \frac{|x|}{2A} \text{ si } -2A \leq x \leq 2A \qquad \Delta_{2A}(x) = 0 \text{ si } |x| > 2A$$

3) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $\Omega$. On suppose que les distributions de X et Y admettent des densités, notés f et g respectivement, qui sont des fonctions à support borné, continues par morceaux.

Démontrer que, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la distribution de la variable X +Y admet pour densité la fonction f*g.

4) Soient f et g deux fonction comme dans (II,1) Démontrer l'égalité

$$\widehat{(f*g)} = \hat{f}\,\hat{g}$$

5) Dans la suite du problème, on utilisera le résultat suivant que l'on admettra :

***Théorème de réciprocité de Fourrier**.–* *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à support borné, à valeurs réelles. On suppose de plus que la fonction $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy}\,dy$$

# III. *Calcul d'intégrales*

1) Soit b un réel >1. On pose $f_b(t) = \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^b$ pour tout t réel $\neq 0$, et $f_b(0) = 1$

Démontrer que la fonction $f_b$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite on note $J_b$ la valeur de l'intégrale $J_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\,dt$

2) rappelons que l'on a noté $\Delta_1$ la fonction définie par :

$$\Delta_1(x) = 1 - |x| \text{ si } -1 \le x \le 1 \qquad \Delta_1(x) = 0 \text{ si } |x| > 1$$

a) En utilisant (I.2.b) (II.2) et (II.4), démontrer que l'on a $\hat{\Delta}_1(y) = f_2\left(\dfrac{y}{2}\right)$

b) En utilisant le théorème de ***réciprocité de Fourrier*** (II.5), calculer la valeur de l'intégrale $J_2$.

3) a) En utilisant la définition donnée dans (II.1) de la loi *, calculer $(\Delta_1 * \Delta_1)(0)$.

b) En déduire la valeur de $J_4$.

# IV. *Majoration de l'intégrale* $J_b$ *pour* $b \geq 4$

Rappelons que, si b est un nombre réel >1, on a défini sur $\mathbb{R}$ une fonction $f_b$ en posant $f_b(t) = \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^b$ pour tout t réel $\neq 0$, et $f_b(0) = 1$, que l'on a noté $J_b$ l'intégrale $J_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\,dt$

Cette partie du problème est consacrée à une démonstration de la majoration

$$J_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}} \quad \text{pour } b \geq 4.$$

Cette majoration sera utilisée dans la dernière partie.

1) a) En utilisant un développement en série entière, démontrer que l'on a

$$\frac{\sin t}{t} \le 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \quad \text{pour } 0 < t^2 \le 72$$

b) Démontrer de même que l'on a : $e^{\frac{-t^2}{6}} \ge 1 - \dfrac{t^2}{6} + \dfrac{t^4}{120} - \dfrac{t^4}{1296}$ pour $t^2 \le 30$

c) En déduire que l'on a $0 \le \dfrac{\sin t}{t} \le e^{\frac{-t^2}{6}}$ pour $0 < t^2 \le \dfrac{36}{5}$

2) Dans cette question, on suppose $b \geq 4$. On pose $c = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. On rappelle la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

a) Démontrer que l'on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\,dt \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-bt^2}{6}}\,dt + 2\int_{c}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$

b) Calculer, en fonction de b, la valeur des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-bt^2}{6}}\,dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$.

c) Démontrer que l'on a $x - 1 \ge \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour $x \geq 4$

d) Déduire de ce qui précède la majoration $J_b < \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3}\right)$

Puis la majoration $J_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}}$

*Commentaire* : Dans la dernière partie de ce problème on admettra que l'inégalité $J_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}}$ est valable pour b>2.

## V. Sections hyperplanes du cube

*Dans cette partie, on pourra utiliser le résultat suivant* : *Soit n un entier ≥ 2, soient $g_1$, $g_2$, …., $g_n$ des fonctions positives sur ℝ, continues par morceaux sur tout segment de ℝ, et soient $p_1$, $p_2$ , …., $p_n$ des nombres réels >0 tels que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$ . *On a alors l'inégalité dite de* ***Hölder***

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(t)\right)dt \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)^{p_i}\,dt\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

On désigne par n un entier ≥ 2. On note $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\vec{x}\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$.

On suppose donné un vecteur ***unitaire*** $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. on désigne par H l'hyperplan orthogonal à $\vec{a}$. Pour tout nombre réel r, on note $H_r$ l'hyperplan affine H + r$\vec{a}$ .

Le volume n-dimensionnel $\boldsymbol{v}$(A) d'une partie compacte A de $\mathbb{R}^n$ est donné par l'intégrale n-uple

$$\boldsymbol{v}(A) = \int^{(n)} 1_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}})$ une base orthonormale de l'hyperplan H. Le volume (n–1)-dimensionnel $\sigma_{H_r}$ (B) d'une partie compacte B de $H_r$ est donnée par l'intégrale (n–1)-uple

$$\sigma_{H_r}(B) = \int^{(n-1)} 1_{\tilde{B}}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

Où désigne $1_{\tilde{B}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\tilde{B}$ des points $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que $r\vec{a} + y_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + y_{n-1}\overrightarrow{e_{n-1}}$ appartienne à B.

On admettra que, si A est une partie compacte de, on a $v(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{H_r}(A \cap H_r)\,dr$

On note C le cube $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]^n$ le cube d'arrêt 1, centré à l'origine.

1) Dans cette question on suppose $1 \geq a_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. On note T le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ dont l'image est l'hyperplan $K = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et S le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ d'image H.

a) Démontrer les égalités $S(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = (1 - a^2, -a_1a_2, \ldots, -a_1a_n)$

$$T(S(\vec{\varepsilon}_1)) = (0, -a_1a_2, \ldots, -a_1a_n)$$

b) Démontrer que l'on a $\sigma_H(C\cap H) = \sigma_K(T(C\cap H))\dfrac{\|S(\vec{\varepsilon})\|}{\|T(S(\vec{\varepsilon}))\|}$

c) En déduire l'inégalité $\sigma_H(C\cap H) \leq \sqrt{2}$

2) Dans cette question, on suppose que l'on a $0 < a_i \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

On considère le cube C, muni de la mesure v, comme un ***espace probabilisé***. Pour tout point $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartenant au cube C et pour tout entier i, où $1 \leq i \leq n$, on pose $X_i(\vec{x}) = x_i$ . On définit ainsi des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sur C, ayant toutes pour densités la fonction indicatrice $\chi_{1/2}$ de l'intervalle $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ de $\mathbb{R}$.

a) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels tels que $\alpha \leq \beta$, et soit C(a,b) le polyèdre constitué des points du cube C compris entre les hyperplans $H_\alpha$ et $H_\beta$.

Démontrer que la fonction f, définie par $f(r) = \sigma_H(C\cap H)$ pour tout nombre réel r, est la densité de la variable aléatoire $R = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$.

b) pour $i = 1, \ldots, n$ on note $f_i$ la densité de la variable $a_iX_i$. Démontrer que l'on a

$$\hat{f}_i(y) = \frac{2\sin(\frac{a_i y}{2})}{a_i y}$$

En déduire que l'on a $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2\sin(\frac{a_i y}{2})}{a_i y}\right)dy$

c) pour $i = 1, \ldots, n$ on pose $p_i = \left(\dfrac{1}{a_i}\right)^2$. Remarquer que l'on a > 2 et = 1. En appliquant l'inégalité de Hölder, démontrer l'inégalité $|f(0)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi a_i}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{p_i}(t)dt\right)^{\frac{1}{p_i}}$

d) En admettant que l'on a $J_b < p\sqrt{\dfrac{2}{b}}$ pour tout b>2, démontrer l'inégalité $|f(0)| \leq \sqrt{2}$

e) Démontrer que l'inégalité ne peut avoir lieu que pour n = 2 et $p_1 = p_2 = 2$.

3) Déduire des questions 1) et 2) que la mesure $\sigma_H(C\cap H)$ de la section du cube C par un hyperplan H est majorée par $\sqrt{2}$, et que cette borne n'est atteinte que par les hyperplans orthogonaux aux vecteurs $\vec{\varepsilon}_i \;\forall\; \vec{\varepsilon}_j$ , où $i \neq j$ .