Suites

1) ***Suite*** : une suite est une succession d'objets.

Exemple : a, x, c, d, g, h, y   est une suite de lettres.

Suite de nombres réels : c'est une succession de nombres réels :
Exemple : $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ est une suite de nombre réel
Dans toute la suite, les suites sont considérées comme des suites de nombres réels.

2) ***Ecriture d'une suite*** : dans une suite, pour dire que l'ordre de succession est important, on met la suite entre parenthèse :
Exemple : la suite de l'exemple précédent $S = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$

N.B. La convention générale utilise les ***accolades*** pour désigner un ***ensemble***, et dans un ensemble l'ordre des termes n'est pas exigé, et un terme répété est considéré une seule fois :
$E = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$ est un ensemble qui s'écrit aussi
$E = \{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ ou $E = \{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$
Tandis que $S = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$ ne peut s'écrire sous les formes :
$(\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ ou $(\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$

3) ***Numéroter les termes dans une suite*** : Soit $S = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$ la suite précédente, on remarque qu'elle est formée de 5 termes, il faut pour la numéroter utiliser 5 entier consécutifs, utilisant une seule lettre :
$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$
$S_1 = \sqrt{1}$, $S_2 = \sqrt{2}$, $S_3 = \sqrt{3}$, $S_4 = \sqrt{4}$, $S_5 = \sqrt{5}$.
Premier terme $S_1 = \sqrt{1}$,
Second terme $S_2 = \sqrt{2}$,
Troisième terme $S_3 = \sqrt{3}$,
Quatrième terme $S_4 = \sqrt{4}$,
Cinquième terme $S_5 = \sqrt{5}$.
Les numéros utilisés sont 1, 2, 3, 4, 5

N.B. on peut utiliser d'autre lettre et d'autres entiers consécutifs :
$S = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$
Premier terme $a_0 = \sqrt{1}$,
Second terme $a_1 = \sqrt{2}$,
Troisième terme $a_2 = \sqrt{3}$,
Quatrième terme $a_3 = \sqrt{4}$,

Cinquième terme $a_4 = \sqrt{5}$.
Les numéros utilisés sont 0,1, 2, 3, 4

4) ***Suite finie, suite infinie***: Soit S une suite, on dit qu'elle est finie si elle est formée d'un nombre fini d'éléments, elle possèdera alors un premier élément et un dernier éléments.
$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ est une suite finie.
P = (0, 1, 2, 3, 4, ……) la suite des nombres entiers naturels est infinie
N = (……,–4 , –3, –2, –1, 0) la suite des nombres entiers négatifs est infinie

Exercice :
(……, –4 , –3, –2, –1, 0) et (0, 1, 2, 3, 4, ……) constitue-elles la même suite ?

5) ***Suite majorée, minorée, Bornée***: Soit S une suite.
On dit qu'elle est majorée si tous ses termes sont inférieurs à un nombre donné M,
On dit qu'elle est minorée si tous ses termes sont inférieurs à un nombre donné m,
On dit qu'elle est bornée si tous ses termes sont inférieurs à un nombre donné M, et supérieurs à un nombre m.

Exemple :
P = (0, 1, 2, 3, 4, ……) est une suite minorée par 0 mais elle n'est pas majorée
N = (……, –4 , –3, –2, –1, 0) est majorée par 0, mais elle n'est pas minorée.
P et N sont des suites non bornées.

6) ***Suite positive, négative, alternée***:
Une suite est dite positive si tous ses termes sont positifs
Une suite est dite négative si tous ses termes sont négatifs
Une suite est dite alternée si tout terme positif est suivi d'un négatif, et tout terme négatif est suivi d'un terme positif
P = (0, 1, 2, 3, 4, ……) est positive
N = (……, –4, –3, –2, –1, 0) est négative
A = (0, –1, 2, –3, 4, –5, 6, –7,……) est alternée

7) ***Suite croissante, décroissante constante*** :
Une suite est dite croissante si tout terme est suivi par un terme supérieur, on dit qu'elle est monotone croissante.
Une suite est dite décroissante si tout terme est suivi d'un terme inférieur, on dit qu'elle est monotone décroissante.
Une suite est dite constante si tout terme est suivi par un terme égal, ce qui veut dire, tous les termes de la suite sont égaux. (elle est en même temps croissante et décroissante)
P = (0, 1, 2, 3, 4, ……) est croissante
N = (……, –4, –3, –2, –1, 0) est croissante
(10, 8, 5, 3, 2, 1) est une suite décroissante
(0, –1, 2, –3, 4, –5, 6, –7,……) n'est pas monotone.

8) ***Suite définie à l'aide d'une fonction par accès direct, par accès séquentiel*** :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x)$.

Une suite S est définie en ***accès direct*** par f et numérotée par les entiers naturels $\mathbb{N} = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$, si
$S_0 = f(0)$, $S_1 = f(1)$, $S_2 = f(2)$, $S_3 = f(3)$, $S_4 = f(4)$, ….., $S_n = f(n)$,…..
Une suite S est définie en ***accès séquentiel*** (on dit aussi par ***récurrence***) par f et numérotée par les entiers naturels $\mathbb{N} = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$, si
i) Le premier terme S_0 est donné.
ii) Tout terme est suivi par son image par f.

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$
S est définie par ***accès direct*** par f ;
$S_0 = f(0) = 3$, $S_1 = f(1) = 5$, $S_2 = f(2) = 7$, $S_3 = f(3) = 9$, $S_4 = f(4) = 11$, ….., $S_n = f(n) = 2n + 3$,…..
$S = (3, 5, 7, 9, \ldots, 2n + 3, \ldots)$

Nous pouvons construire par la même fonction f, une suite par ***accès séquentiel***, ou par ***récurrence***, à partir d'un premier terme choisi : $T_0 = 7$:
$T_1 = f(T_0) = f(7) = 2\times7+3 = 17$
$T_2 = f(T_1) = f(17) = 2\times17+3 = 37$
$T_3 = f(T_2) = f(37) = 2\times37+3 = 77$ etc.

Suite arithmétique

9) ***Suite arithmétique*** : Soit U une suite, on dit qu'elle est arithmétique si tout terme est suivi de sa valeur additionnée d'une constante ***b*** appelée ***raison***.

$$U_{k+1} = U_k + b$$

N.B. une suite ***arithmétique*** de raison b, est définie par ***accès séquentiel*** par la fonction ***affine*** $f(x) = x + b$. le coefficient directeur vaut 1.

10) ***Terme général d'une suite arithmétique*** :
Soit $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_k, \ldots, U_n)$ une suite arithmétique de raison ***b***.
Elle est formée de n +1 terme (c'est une suite finie)
U_0, est le premier terme
$U_1 = U_0 + b$
$U_2 = U_1 + b = U_0 + b + b = U_0 + 2b$
$U_3 = U_2 + b = U_0 + 2b + b = U_0 + 3b$
$U_4 = U_3 + b = U_0 + 3b + b = U_0 + 4b$
Etc.
$U_k = U_0 + kb$
etc
$U_n = U_0 + nb$

On retient les résultats :
Longueur de la suite finie : n+1

Premier terme : U_0
Terme général : $U_k = U_0 + kb$
Dernier terme : $U_n = U_0 + nb$
Formule de récurrence : $U_{k+1} = U_k + b$

11) ***Somme d'une suite arithmétique*** : Soit $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_k, \ldots., U_n)$ on définit la somme de cette suite par $\Sigma(U) = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_k, \ldots. + U_n$.

$\Sigma(U) = U_0 + U_0 + b + U_0 + 2b + U_0 + 3b + \ldots + U_0 + kb, \ldots. + U_0 + nb$.

$\Sigma(U) = (n+1)U_0 + b + 2b + 3b + \ldots + kb \ldots. + nb$.

$\Sigma(U) = (n+1)U_0 + b(1 + 2 + 3 + \ldots + k \ldots. + n)$.

12) ***Notation sommation*** Σ : Soit la somme d'une suite finie $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

Cette somme se note symboliquement $\sum_{k=1}^{k=7} a_k$:

$$\sum_{k=1}^{k=7} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

N.B. si tous les termes de cette suite sont nuls : $\sum_{k=1}^{k=7} a_k = 0$

N.B. si tous les termes de cette suite sont 1 : $\sum_{k=1}^{k=7} a_k = 7$

En général $\sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots. + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Exercice :

i) vérifier : $\sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$

ii) vérifier : $\sum_{k=1}^{k=n} (sa_k) = s\sum_{k=1}^{k=n} a_k$, $\sum_{k=1}^{k=n} k = n$.

13) ***Calcul de $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots. + (n-2) + (n-1) + n$*** :

$S_n = 1 \quad +2 \quad +3 + \ldots. + (n-2) + (n-1) + n$: s'écrit aussi :
$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots. \quad +3 \quad +2 \quad +1$, par addition
$2S_n = (1 + n) + (1 + n) + (1 + n) + \ldots. + (1 + n) + (1 + n) + (1 + n)$
Somme de n parenthèses dont chacune est $(1 + n)$:
$2S_n = n(1 + n)$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots. + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somme de la suite arithmétique $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots, U_n)$ est alors :

$\Sigma(U) = (n+1)U_0 + b(1 + 2 + 3 + \dots + k \dots + n) =$

$$\Sigma(U) = (n+1)U_0 + b\frac{n(n+1)}{2}$$

14) ***Les formules de la somme d'une suite arithmétique*** :

Pour une suite arithmétique $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots, U_n)$ de raison b :

$$\Sigma(U) = (n+1)U_0 + b\frac{n(n+1)}{2}$$

Par factorisation :

$$\Sigma(U) = (n+1)\{U_0 + b\frac{n}{2}\} = (n+1)\frac{2U_0 + nb}{2} = (n+1)\frac{U_0 + (U_0 + nb)}{2} = (n+1)\frac{U_0 + U_n}{2}$$

$$\Sigma(U) = (n+1)\frac{U_0 + U_n}{2}$$

N.B. La somme d'une progression arithmétique vaut : la moyenne du premier terme et du dernier terme, cette moyenne est multipliée par le nombre des termes de cette suite.

$$\Sigma(U) \quad = \quad \boldsymbol{Long}(U)\frac{(1er\ Terme) + (Dernier\ Terme)}{2}$$

Suite géométrique

15) ***Suite géométrique*** : Soit V une suite, on dit qu'elle est géométrique si tout terme est suivi de sa valeur multipliée d'une constante ***a*** appelée ***raison***.

$$V_{k+1} = a \times V_k$$

N.B. une suite ***géométrique*** de raison a, est définie par ***accès séquentiel*** par la fonction ***linéaire*** f(x) = ax. ***a*** est le coefficient directeur.

16) ***Terme général d'une suite géométrique*** :

Soit $V = (V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots, V_n)$ une suite géométrique de raison ***a***.

Elle est formée de n +1 terme (c'est une suite finie)

V_0, est le premier terme

$V_1 = a \times V_0$

$V_2 = a \times V_1 = a \times a \times V_0 = a^2 \times V_0$

$V_3 = a \times V_2 = a \times a^2 \times V_0 = a^3 \times V_0$

Etc.

$V_k = a^k \times V_0$

etc

$V_n = a^n \times V_0$

On retient les résultats :

Longueur de la suite finie : n+1

Premier terme : V_0

Terme général : $V_k = a^k \times V_0$

Dernier terme : $V_n = a^n \times V_0$
Formule de récurrence : $V_{k+1} = a \times V_k$

17) ***Somme d'une suite géométrique***: Soit $V = (V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k, \ldots, V_n)$ on définit la somme de cette suite par $\Sigma(V) = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_k, \ldots + V_n$.

$$\Sigma(V) = V_0 + a \times V_0 + a^2 \times V_0 + \ldots + a^k \times V_0 + \ldots + a^n \times V_0.$$

$$\Sigma(V) = V_0 \{1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^n\}$$

18) ***Calcul de $T_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^n$:***
$T_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^n$:
Par multiplication par a:
$a \times T_n = a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^{n+1}$:
Puis par soustraction :
$a \times T_n - T_n = a^{n+1} - 1$
$(a - 1) \times T_n = a^{n+1} - 1$
Il y a deux cas:
a = 1 : $T_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^n = 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^k + \ldots + 1^n = n + 1$.
a ≠ 1 :
$(a - 1) \times T_n = a^{n+1} - 1$

$$T_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

19) ***Les formules de la somme d'une suite géométrique***:
Pour une suite géométrique $V = (V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k, \ldots, V_n)$ de raison a :

$$\Sigma(V) = V_0 \{1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots + a^n\}$$

a = 1 : $\Sigma(V) = V_0 \{n+1\}$
a ≠ 1 : $\Sigma(V) = V_0 \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ (n+1 est le nombre des termes)

Exemple: V la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ formée de 12 termes :

$$\Sigma(V) = V_0 \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = 1 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \times \{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12+1}\} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 2 - \frac{1}{2^{12}}$$